Fisica e sistemi complessi

La fisica si e' sviluppata seguendo la linea riduzionista: lo studio di un fenomeno e' riconducibile allo studio dei costituenti

MOLECOLE → ATOMI → NUCLEI → QUARK → ?

E

Il percorso inverso, dall'equazione al fenomeno, puo' essere altrettanto difficile (e bello)

Sistemi complessi: il passaggio dalle equazioni costituenti alla fenomenologia non e' ovvio

Le equazioni della fluidodinamica viscosa sono note da 150 anni ma ancora una teoria completa della turbolenza non esiste.

Sistemi complessi e predicibilita'

Una teoria fisica deve essere in grado di fare previsioni
(esempio: astronomia)

Per i sistemi complessi e' difficile fare previsioni

* Sistemi complicati (schedina totocalcio)

  L'impredicibilita' e' dovuta al gran numero di cause in gioco
  che non riusciamo a controllare (non conosciamo le equazioni)

* Sistemi complessi

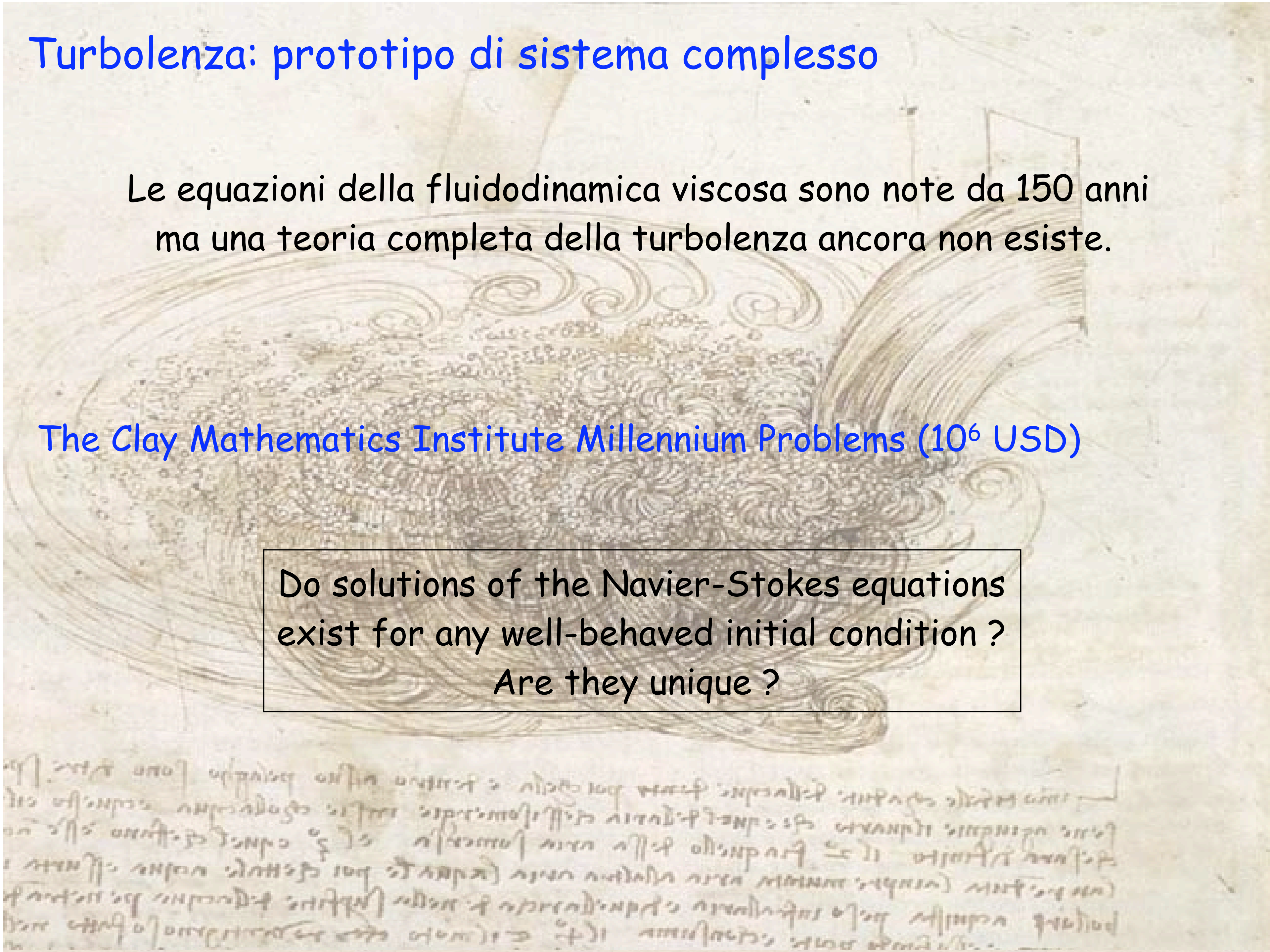
  L'impredicibilita' e' dovuta alla dinamica intrinsecamente instabile
  (conosciamo le equazioni, ma non basta)

Predicibilita' e sistemi caotici

Se conoscessimo esattamente le leggi della natura e la situazione dell'universo all'istante iniziale, potremmo prevedere esattamente la situazione dello stesso universo in un istante successivo. Ma se pure le leggi naturali non avessero piu' segreti per noi, potremmo conoscere la situazione iniziale solo approssimativamente.
[...] puo' accadere che piccole differenze nelle condizioni iniziali ne producano di grandissime nei fenomeni finali. Un piccolo errore nelle prime produce un errore enorme nei secondi. La previsione diventa impossibile e si ha un fenomeno fortuito.

Henri Poincare' (1854-1912)

Turbolenza: prototipo di sistema complesso



Le equazioni della fluidodinamica viscosa sono note da 150 anni ma una teoria completa della turbolenza ancora non esiste.

The Clay Mathematics Institute Millennium Problems (10^6 USD)

> Do solutions of the Navier-Stokes equations exist for any well-behaved initial condition ?
> Are they unique ?

Turbolenza: prototipo di sistema complesso

tubes were immersed, arrangements being made so that a streak or streaks of highly coloured water entered the tubes with the clear water.

The general results were as follows :—

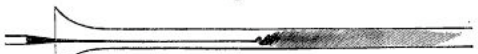
(1.) When the velocities were sufficiently low, the streak of colour extended in a beautiful straight line through the tube, fig. 3.

Fig. 3.

(2.) If the water in the tank had not quite settled to rest, at sufficiently low velocities, the streak would shift about the tube, but there was no appearance of sinuosity.

(3.) As the velocity was increased by small stages, at some point in the tube, always at a considerable distance from the trumpet or intake, the colour band would all at once mix up with the surrounding water, and fill the rest of the tube with a mass of coloured water, as in fig. 4.

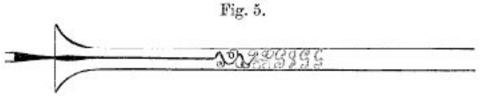
Fig. 4.



Any increase in the velocity caused the point of break down to approach the trumpet, but with no velocities that were tried did it reach this.

On viewing the tube by the light of an electric spark, the mass of colour resolved itself into a mass of more or less distinct curls, showing eddies, as in fig. 5.

Fig. 5.



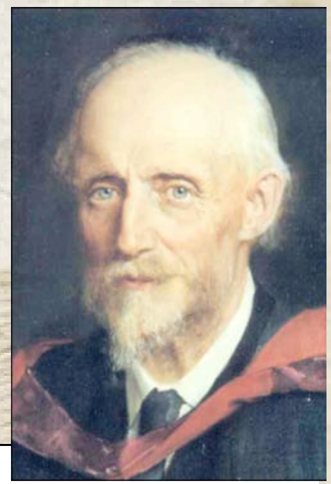
The experiments thus seemed to settle questions 3 and 4 in the affirmative, the existence of eddies and a critical velocity.

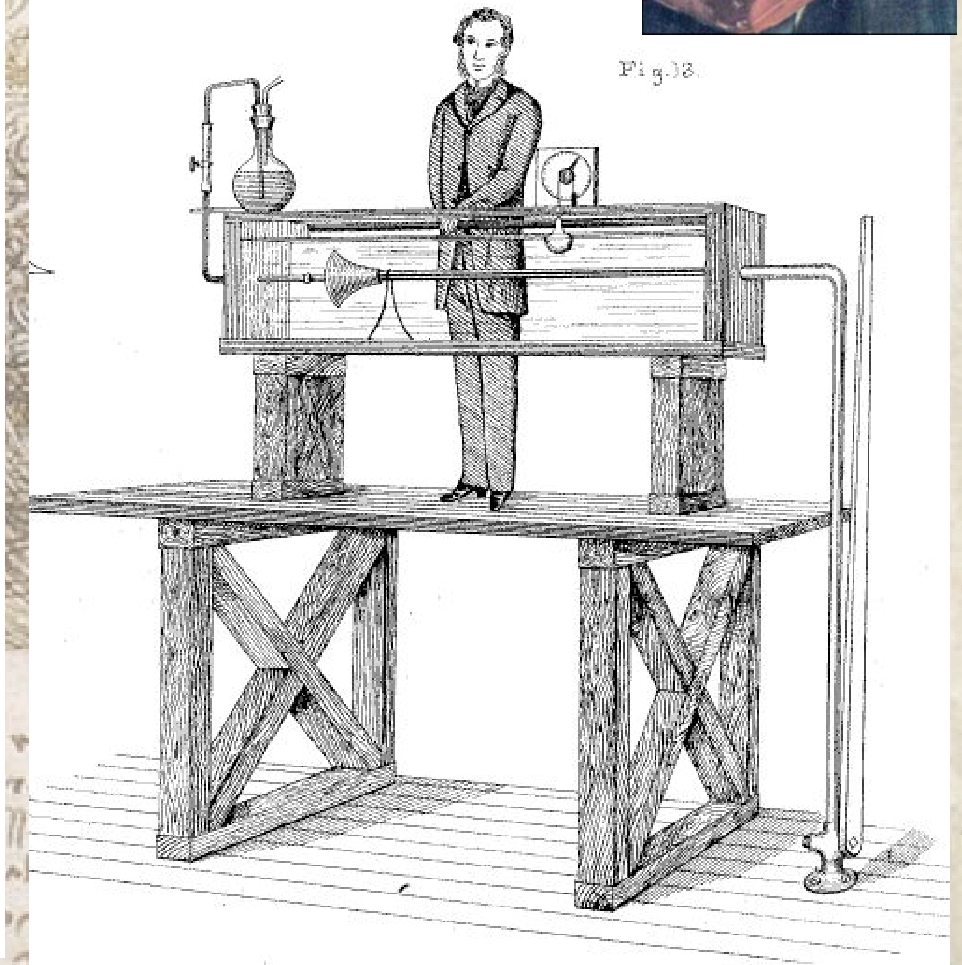
They also settled in the negative question 6, as to the eddies coming in gradually after the critical velocity was reached.

In order to obtain an answer to question 5, as to the law of the critical velocity, the diameters of the tubes were carefully measured, also the temperature of the water, and the rate of discharge.

(4.) It was then found that, with water at a constant temperature, and the tank as still as could by any means be brought about, the critical velocities at which the

Osborne Reynolds (1883)





Turbolenza: non solo insuccessi

Lo studio della turbolenza ha portato anche
a risultati e concetti generali di uso in altri campi:

A.N. Kolmogorov, 1941

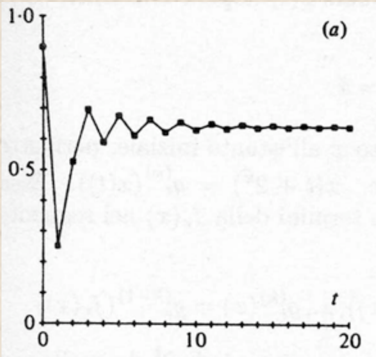
Invarianza di scala
descritta per la prima volta nell'analisi di dati
di velocita' turbolenti e utilizzata per la teoria di
Kolmogorov del 1941

L.F. Richardson, 1966

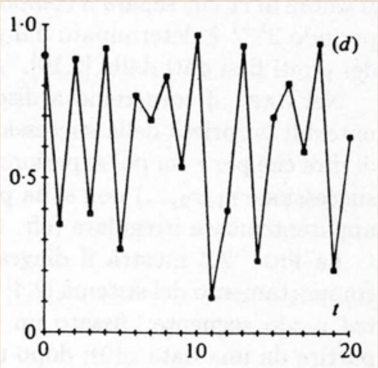
Dimensione frattale
una delle prime applicazioni fisiche della geometria
frattale e' nello studio della turbolenza

Caos e complessita'

Le serie temporali caotiche sono "complesse"



regolare



caotica

Come misurare la complessita' ?

Teoria dell'informazione

(Shannon)

Consideriamo due esempi di
schedine del totocalcio:

entrambe hanno la stessa probabilitá:

$p = (1/3)^{13} = 0.00000062$

ma ovviamente

quella a sx é inverosimile
quella a dx sembra plausibile (tipica)

1	1
1	2
1	1
1	X
1	X
1	2
1	1
1	X
1	1
1	2
1	X
1	1
1	X

La probabilitá di un evento non é una buona misura della sua complessitá

Complessita' algoritmica (Kolmogorov, Chaitin)

Consideriamo degli esempi di serie temporali binarie:

$$\left.\begin{array}{l}\text{(a)}\ \ 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,\ldots\ldots \\ \text{(b)}\ \ 1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,\ldots\ldots\end{array}\right\}\ \text{semplici}$$

(c) 0 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 0 1 0 1 1 1 0 1 . . . . . .   complessa

Sia K(N) la lunghezza (misurata in qualche modo) del piu' corto programma (insieme di istruzioni) in grado di generare la sequenza di N simboli

La complessita' algoritmica e' definita, per grandi N come

$$\boxed{K = \frac{K(N)}{N}}$$

(NB: non dipende dal linguaggio)

Complessita' algoritmica degli esempi:

(a) 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 . . . . . .

"scrivi 1 N volte" K=0

(b) 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 . . . . . .

"scrivi 100 N/3 volte" K=0

(c) 0 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 0 1 0 1 1 1 0 1 . . . . . .

Se la sequenza (c) e' casuale (esempio, lancio moneta), allora l'unico modo e':

"scrivi 010010110101100 ... " K=1

Questo e' il modo in cui viene usualmente trasmessa l'informazione (esempio: risultati di partite di calcio, oppure tavole per p)

Un sistema caotico e' complesso ?

Apparentemente no, perche' basta trasmettere
la regola che genera la sequenza, ad esempio: $x(t+1) = \lambda\, x(t)\, (1 - x(t))$

Se pero' voglio generare una specifica sequenza,
devo dare anche la condizione iniziale $x(0)$

Se il sistema e' caotico, la condizione iniziale deve essere molto precisa
per riprodurre una sequenza lunga.

In generale si trova che in un sistema caotico la condizione iniziale deve
avere un numero di cifre proporzionale a N
(errore cresce esponenzialmente)

$\Downarrow$

I sistemi caotici hanno complessita' algoritmica non nulla